Mathematische Grundlagen: Probeklausur vom 23.12.2007

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Probeklausur Mathematische Grundlagen (1141) WS 07/08

Klausur am 32. Dezember 2007:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen der folgenden Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ 6\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$$

1. Bestimmen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix.
2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems.

[*8 + 4 = 12 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$. Sei $f : V \to V$ definiert durch $f(a + bT + cT^2) = (a + c) + bT^2$ für alle $a + bT + cT^2 \in V$.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Wählen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V und berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Bestimmen Sie $\mathrm{Rg}(f)$.

[*4 + 4 + 2 = 10 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $U = \{2a + 3b + bT + aT^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[T]$.

1. Beweisen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}[T]$ ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von U.

[*6 + 8 = 14 Punkte*]

Aufgabe 4

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Formel gilt.

$$\sum_{i=1}^{n} (4i - 3) = n(2n - 1)$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) mit $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

Hinweis: Mit der dritten binomischen Formel gilt $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) = 1$.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 6

Beweisen Sie, dass folgende Reihen konvergent sind.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{4} + \frac{1}{n})^n$
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

[*4 + 4 + 4 = 12 Punkte*]

Aufgabe 7

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ für die durch $f(x) = \tan(\frac{\pi x}{x^2-1})$ gegebene Funktion an. In welchen Punkten ist f stetig?

Hinweis: Die Nullstellen einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q$ sind $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 8

Sei $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^n \exp(-x)$.

Beweisen Sie, dass f in $x_0 = n$ ein lokales Maximum hat.

[*8 Punkte*]

Mathematische Grundlagen (1141) — WS 07/08

Klausur am 09.02.2008:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen der folgenden Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $V = \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$, und sei $f : V \to V$ definiert durch $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$ und von $\mathrm{Kern}(f)$.

[*4 + 12 = 16 Punkte*]

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ ist.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 4

Beweisen Sie folgende Formel mit vollständiger Induktion.

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

[10 Punkte]

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) mit $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergent ist, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Hinweis: Mit der dritten binomischen Formel gilt $(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n) = n$.

[8 Punkte]

Aufgabe 6

Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ konvergent ist.

[8 Punkte]

Aufgabe 7

Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$, und seien $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Für alle $x \in I \cap \mathbb{Q}$ sei $f(x) = g(x)$.

Beweisen Sie, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

[10 Punkte]

Aufgabe 8

Sei $x \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x) = \sqrt{\sin(\frac{\cos(x)}{x})}$ definiert ist. Berechnen Sie $f'(x)$.

[8 Punkte]

Aufgabe 9

1. Konstruieren Sie eine Interpretation, sodass die Formel $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ wahr ist.

2. Konstruieren Sie eine Interpretation, sodass die Formel $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ falsch ist.

[*4 + 4 = 8 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Mathematische Grundlagen: Nachklausur vom 29.03.2008

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

FernUniversität in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.
Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen
(Name, Vorname)
(Straße, Nr.)
(PLZ, Wohnort)

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Klausur
WS 2007/08

Nachklausur: 01141 Mathematische Grundlagen
DATUM: 29.3.2008
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte die grau hinterlegten Felder leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubtes Hilfsmittel ist ein beidseitig beschriebenes, handschriftliches DIN-A4 Blatt mit eigenen Aufzeichnungen.
6. Weitere Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Aufzeichnungen, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.
7. Die Finanzamtsbescheinigung wird Ihnen zugeschickt.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Bearbeitet										
max. Punktezahl	8	8	8	8	8	12	12	12	4	80
erreichte Punktezahl										
Korrektur										

Datum/Note	

Mathematische Grundlagen (1141) WS 07/08

Nachklausur am 29.03.2008:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen der folgenden Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei v_1, v_2, v_3 eine Basis $\mathcal{B}$ von V. Sei $f : V \to V$ die lineare Abbildung, die durch $f(v_1) = v_2 + v_3$, $f(v_2) = v_3$ und $f(v_3) = v_1 - v_2$ definiert wird.

Berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ und $\dim(\mathrm{Bild}(f))$.

[*4 + 4 = 8 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 über $\mathbb{R}$.

Sei $U = \{a + bT + aT^2 + (a+b)T^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

1. Beweisen Sie, dass U ein Unterraum von V ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von U.

[*4 + 4 = 8 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $f : V \to V$ linear, und sei $\operatorname{Kern}(f) = \operatorname{Bild}(f)$.

1. Beweisen Sie, dass $\dim(V)$ gerade ist.
2. Geben Sie ein Beispiel für einen Vektorraum V und eine lineare Abbildung f mit $\operatorname{Kern}(f) = \operatorname{Bild}(f)$. (Begründung bitte nicht vergessen.)

[*2 + 6 = 8 Punkte*]

Aufgabe 5

Beweisen Sie folgende Formel mit vollständiger Induktion.

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} = 3^n - 1.$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 6

1. Beweisen Sie, dass die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{10^n} x^n$ für alle x mit $|x| < 10$ konvergent ist.
2. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{(n+1)!}$ konvergent ist.

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

Aufgabe 7

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto x - \exp(-x)$.

1. Beweisen Sie, dass f injektiv ist.
2. Beweisen Sie, dass die Gleichung $x = \exp(-x)$ genau eine reelle Lösung $x \in \mathbb{R}$ besitzt.

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte der Funktion $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto \cos(x) - \cos^2(x)$.

Hinweis: Es sind $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ und $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

[*12 Punkte*]

Aufgabe 9

Berechnen Sie eine Negationsnormalform von $\neg((A \vee B) \wedge (\neg C \vee D))$. Dabei sind A, B, C und D Atome.

[*4 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Mathematische Grundlagen: Klausur vom 29.08.2009

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

FernUniversität in Hagen

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
SoSe 2009

DATUM: 29.08.2009
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise
(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Aufzeichnungen, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Bearbeitet										
max. Punktezahl	10	8	12	4	10	10	4	10	12	80
erreichte Punktezahl										
Korrektur										

Prüfergebnis/Note	

Mathematische Grundlagen (01141) **SoSe 2009**

Klausur am 29.08.2009:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+10)(k+11)} = \frac{1}{10} - \frac{1}{n+11}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Treppennormalform und den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{44}(\mathbb{R}).$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}[T]$ definiert durch $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b)+(a+b)T+(a+b+c+d)T^2$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Berechnen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

[*4 + 8 = 12 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei X_0 eine fest gewählte Matrix in $\mathrm{M}_{23}(\mathbb{R})$. Sei $V = \{A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \mid AX_0 = 0\}$. Beweisen Sie, dass V ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ ist.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass die Funktion $f : [1, e] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x} - \ln(x)$, im Intervall $[1, e]$ genau eine Nullstelle hat.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = (2x^2 - x - 1)\exp(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie f auf lokale Minima und Maxima.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Untersuchen Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2(-2)^{-n}$ konvergiert.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 8

Die Kommissarin hat drei Tatverdächtige P, Q und R. Die Voruntersuchungen haben ergeben:

1. Wenn Q oder R schuldig sind, dann ist P unschuldig.
2. Ist P unschuldig oder R unschuldig, so ist Q schuldig.
3. Ist R schuldig, dann ist auch P schuldig.

Lässt sich aus den Voruntersuchungen eindeutig ermitteln, wer der/die Täter ist/sind? Falls ja, wer ist schuldig, und wer ist unschuldig?

[*10 Punkte*]

Aufgabe 9

Die reelle Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 = 88$ und $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 12}$ für alle $n > 1$.

1. Beweisen Sie mit Hilfe des Monotonieprinzips, dass (a_n) konvergent ist.
2. Bestimmen Sie den Grenzwert von (a_n).

   Hinweis: Hier könnte es nützlich sein, auch die Folge (a_{n+1}^2) zu betrachten.

[*8 + 4 = 12 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1} x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)} a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Mathematatische Grundlagen: Klausur vom 14.02.2009

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Mathematische Grundlagen (01141) **WS 2008/09**

Klausur am 14.02.2009:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[10 Punkte]

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[10 Punkte]

Aufgabe 3

Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$, und sei $W = M_{22}(\mathbb{R})$.

Sei $f : V \to W$ definiert durch $f(a_0 + a_1T + a_2T^2) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & 2a_2 \\ -a_2 & a_1 - a_0 \end{pmatrix}$ für alle $a_0 + a_1T + a_2T^2 \in V$.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.
3. Wählen Sie Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W und bestimmen Sie ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

[4 + 6 + 6 Punkte]

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass die Folge $(\frac{\sin(n)}{n})$ konvergent ist, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 5

Finden Sie alle Stellen, in denen die Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \cos(x) - \cos^2(x)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$ ein lokales Minimum oder Maximum annimmt. (Hinweis: Für $x = \frac{\pi}{3}$ gilt $\cos(x) = \frac{1}{2}$.)

[*12 Punkte*]

Aufgabe 6

Beweisen Sie, dass die Funktion $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = 2^x - x - 3$ für alle $x \in [0,3]$, mindestens eine Nullstelle besitzt.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 7

Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen mit $a_i > 0$ und $b_i > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die Folge $(\frac{a_n}{b_n})$ sei konvergent.

Beweisen Sie: Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent, so ist auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

[*12 Punkte*]

Aufgabe 8

Sei $0 < a < b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\int\limits_a^b x^2 \ln(x) dx$.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 9

Beweisen Sie, dass die prädikatenlogische Formel

$$\alpha = \forall x \forall y (P(x,y) \to P(y,x))$$

weder widerspruchsvoll noch tautologisch ist. Benutzen Sie dafür Interpretationen mit dem Universum $U = \mathbb{Z}$.

[*4 Punkte*]

Mathematische Grundlagen: Klausur vom 13.02.2010

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

FernUniversität in Hagen

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
WS 2009/10

DATUM: 13.02.2010
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Aufzeichnungen, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Bearbeitet									
max. Punktezahl	10	8	16	4	8	14	10	10	80
erreichte Punktezahl									
Korrektur									

Prüfergebnis/Note	

Mathematische Grundlagen (01141) **WS 2009/10**

Klausur am 13.02.2010:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie die zu A inverse Matrix.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{23}(\mathbb{R})$ definiert durch $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+c & d \\ b & a+d & a \end{pmatrix}$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.
3. Beweisen Sie, dass f injektiv ist.

[*4 + 8 + 4 = 16 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto |x-1| + 3x - x^2$.

Beweisen Sie, dass f in $[0,4]$ eine Nullstelle besitzt.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 5

Begründen Sie, warum Sie bei der Berechnung des Grenzwertes

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1 - x}{\sin^2(x)}$$

die Regel von de l'Hospital verwenden dürfen, und berechnen Sie diesen Grenzwert.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 6

1. Beweisen Sie, dass $(-1, 1)$ das Konvergenzintervall der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ist.
2. Untersuchen Sie, ob diese Potenzreihe in den Punkten $x = 1$ beziehungsweise $x = -1$ konvergent ist.

[*6 + 8 = 14 Punkte*]

Aufgabe 7

Seien A, B, C, D Atome für die folgende Aussagen gelten:

1. $A \to C \vee \neg D$
2. $B \vee C \to D$
3. $A \wedge B$

Weisen Sie mit einem formalen Beweises nach, dass dann auch C gilt. Erläutern Sie stichwortartig die einzelnen Beweisschritte.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 8

Sei $x_0 \in (0, 1)$ fest gewählt. Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{x_0 + a_n}{1 + a_n}$.

Sie dürfen im Folgenden ohne Beweis verwenden, dass $a_n > \sqrt{x_0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

1. Beweisen Sie mit Hilfe des Monotonieprinzips, dass (a_n) konvergent ist.
2. Bestimmen Sie den Grenzwert von (a_n).

[*4 + 6 = 10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Mathematatische Grundlagen: Klausur vom 28.08.2010

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

FernUniversität in Hagen

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
SoSe 2010

DATUM: 28.08.2010
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise
(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Aufzeichnungen, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Bearbeitet										
max. Punktezahl	10	12	4	8	10	8	4	10	14	80
erreichte Punktezahl										
Korrektur										

Prüfergebnis/Note	

Mathematische Grundlagen (01141) **SoSe 2010**

Klausur am 28.08.2010:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{43}(\mathbb{R})$. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und von $\mathrm{Bild}(f)$.

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei V der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2. Sei $f : V \to \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ definiert durch $f\left(\sum_{i=0}^{2} a_i T^i\right) = \begin{pmatrix} a_0 & a_0 + a_1 \\ a_1 + a_2 & a_0 \end{pmatrix}$ für alle $\sum_{i=0}^{2} a_i T^i \in V$.

Beweisen Sie, dass f linear ist.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Seien $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängige Vektoren in V, von denen jeweils $n-1$ linear unabhängig sind. Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ Skalare, sodass $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ ist.

Beweisen Sie: Entweder sind alle Skalare $a_i = 0$ oder es sind alle $a_i \neq 0$.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 5

Sei $f : [0, \frac{1}{100}] \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto \cos(200x) - \exp(x) + 1$ für $x \in [0, \frac{1}{100}]$.

Beweisen Sie, dass f in $[0, \frac{1}{100}]$ genau eine Nullstelle besitzt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \cos(\frac{x}{2})\sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom von f in $a = \frac{\pi}{2}$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Untersuchen Sie, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{3}$ konvergiert.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 8

Seien A und B Atome. Es werden die Formeln $\alpha = A \to B$, $\beta = \neg A \to \neg B$ und $\gamma = \neg(A \wedge B)$ betrachtet.

1. Formulieren Sie die Konjunktion aus den Formeln; überführen Sie diese in eine konjunktive Normalform (bitte angeben), welche Sie anschließend mittels weiterer Äquivalenzumformungen zu einer Formel in Negationsnormalform mit möglichst wenigen Junktoren vereinfachen. Erläutern Sie die einzelnen Umformungen stichwortartig.
2. Was lässt sich über mögliche Werte für A und B in der vorangegangenen Teilaufgabe aussagen, wenn eine Bewertung $\mathfrak{I}$ den Formeln α, β und γ jeweils den Wert 1 zuordnet? Begründen Sie Ihre Antwort.

[*6 + 4 = 10 Punkte*]

Aufgabe 9

Die reelle Folge (a_n) sei wie folgt definiert: Es sind $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}$ für alle $n \geq 1$.

1. Beweisen Sie mit dem Monotonieprinzip, dass (a_n) konvergent ist.
2. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass $a_n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

[*8 + 6 = 14 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k + 1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Mathematische Grundlagen: Klausur vom 26.03.2011

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Mathematische Grundlagen (01141) WS 2010/11

Klausur am 26.03.2011:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $n^2 > n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$. Berechnen Sie die zu A inverse Matrix.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für alle $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ sei Spur(A) definiert durch $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, also die Summe der Diagonalelemente von A.

1. Beweisen Sie, dass $V_n = \{A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Spur}(A) = 0\}$ ein Unterraum von $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von $V_2 = \{A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Spur}(A) = 0\}$.

[*4 + 8 = 12 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $a_0 \in \mathbb{K}$ fest gewählt. Sei $f_{a_0} : V \to V$ definiert durch $f_{a_0}(v) = a_0 v$ für alle $v \in V$.

1. Beweisen Sie, dass f_{a_0} linear ist.
2. Bestimmen Sie die Dimension von Kern(f_{a_0}) und von Bild(f_{a_0}).

[*2 + 8 = 10 Punkte*]

Aufgabe 5

Begründen Sie, warum Sie bei der Berechnung des folgenden Grenzwertes die Regel von de l'Hospital anwenden dürfen, und berechnen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$$

[*4 Punkte*]

Aufgabe 6

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ für alle $x \in [0,1]$. Bestimmen Sie alle $x \in [0,1]$, bei denen Minima oder Maxima vorliegen.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n(n+1)})$.

Hinweis: Möglicherweise ist folgende Gleichung hilfreich: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

[*12 Punkte*]

Aufgabe 8

Untersuchen Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{17^n}$ konvergiert.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 9

Seien A, B, C, D Atome. Überführen Sie

$$\neg(A \vee \neg C \to \neg B) \vee (C \wedge B \to D)$$

schrittweise in eine Negations- und diese dann in eine disjunktive Normalform mit möglichst wenig Konjunktionen.

Erläutern Sie stichwortartig die jeweils vorgenommenen Äquivalenzumformungen, und benennen Sie Ihre Ergebnisse.

[*12 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Mathematatische Grundlagen: Klausur vom 24.09.2011

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2011

Klausur am 24.09.2011:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mit A^n bezeichnen wir das n-fache Produkt, also $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ Mal}}$.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Treppennormalform und den Rang der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. im Fall $A \in \mathrm{M}_{44}(\mathbb{R})$.
2. im Fall $A \in \mathrm{M}_{44}(\mathbb{F}_2)$.

[*6 + 4 = 10 Punkte*]

Aufgabe 3

Finden Sie einen 3-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}^4$, der keinen einzigen Vektor der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ enthält.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Seien f und g lineare Abbildungen von V nach V. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Kern}(g) \subseteq \mathrm{Kern}(f+g)$ gilt.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) mit $a_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergent ist.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Berechnen Sie

1. die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt[3]{\sin(2x)^2}$.
2. das Integral $\int\limits_a^b x^2 \cos(x)dx$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

[*4 + 6 = 10 Punkte*]

Aufgabe 7

Untersuchen Sie (zum Beispiel mit Hilfe des Quotientenkriteriums) für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ konvergent ist.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 8

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = ax - \sqrt{x}$.

Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen f monoton wachsend beziehungsweise monoton fallend ist. Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 9

Seien P und Q zweistellige Relationen auf einem Universum U und c eine Konstante.Überführen Sie

$$\neg\exists x(\forall y P(y, x) \to \exists y Q(y, c))$$

schrittweise in eine Negations- und diese dann in eine pränexe Normalform.

Erläutern Sie stichwortartig die jeweils vorgenommenen Äquivalenzumformungen.

[*10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Mathematatische Grundlagen: Klausur vom 24.03.2012

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Mathematische Grundlagen (01141) WS 2011/12

Klausur am 24.03.2012:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Suchen Sie die kleinste natürliche Zahl, für die die Ungleichung $4n + 3 \leq 2^n$ gilt, und beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Ungleichung auch für alle natürlichen Zahlen, die größer sind als diese, erfüllt ist.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{34}(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von λ) die Treppennormalform von A_λ.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.

1. Beweisen Sie, dass V ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von V.

[*4 + 6 = 10 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ diejenige Abbildung, die jeder Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Matrix $f(A) = \begin{pmatrix} a & b+c \\ b+c & d \end{pmatrix}$ zuordnet.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Bestimmen Sie Basen von $\mathrm{Kern}(f)$ und von $\mathrm{Bild}(f)$.

[*3 + 7 = 10 Punkte*]

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass die durch

$$a_1 = 8\ , \quad a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

rekursiv definierte Folge konvergiert. Bestimmen Sie ihren Grenzwert.
(Hinweis: Monotonieprinzip, vollständige Induktion.)

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx\ .$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$$

konvergiert, d.h. bestimmen Sie ihren Konvergenzradius R und begründen Sie, ob für $x = -R$ und $x = R$ Konvergenz oder Divergenz vorliegt.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 8

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = xe^{-x}$. Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen f monoton wachsend beziehungsweise monoton fallend ist. Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 9

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = (A \vee B) \to (C \vee D)\ .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

[*8 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Mathematatische Grundlagen: Klausur vom 22.09.2012

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Mathematische Grundlagen (01141) **SoSe 2012**

Klausur am 22.09.2012:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}k^2 = n(2n-1)$.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Lösungsmenge über $\mathbb{R}$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $C[a,b]$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$ (Sie müssen nicht zeigen, dass dies ein Vektorraum ist). Zeigen Sie, dass

$$U = \{f \in C[a,b] \mid \int_a^b f(x)dx = 0\}$$

ein Unterraum von $C[a,b]$ ist.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und seien $v_1, v_2 \in V$ linear unabhängig. Sei $v_3 \in V$ so, dass v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind. Zeigen Sie, dass es $a, b \in \mathbb{K}$ mit

$$v_3 = av_1 + bv_2$$

gibt.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 5

Es sei $V = \{p \in \mathbb{R}[T] \mid \mathrm{Grad}(p) \leq 2\}$. Sei $f : V \longrightarrow M_{14}(\mathbb{R})$ mit $f(a_0+a_1T+a_2T^2) = (a_0, -a_1, a_2, a_0 + a_1 + a_2)$. Die Abbildung f ist linear, was Sie aber nicht beweisen müssen.

1. Berechnen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.
2. Berechnen Sie ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)$ mit $\mathcal{B} = (1, T, T^2)$ und

$$\mathcal{C} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

[*6 + 4 = 10 Punkte*]

Aufgabe 6

Sei $a_1 \in \mathbb{R}$ mit $a_1 > 0$. Für alle $n \geq 1$ sei $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} > 0$.

Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) konvergent ist.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 7

1. Begründen Sie, warum Sie beim Beweis, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+(-1)^n}{n^2}$ konvergent ist, das Leibnizkriterium NICHT anwenden können.
2. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+(-1)^n}{n^2}$ konvergent ist (z.B indem Sie sie als Summe konvergenter Reihen schreiben).

[*4 + 4 = 8 Punkte*]

Aufgabe 8

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$.

Beweisen Sie, dass $\exp(x)(y - x) < \exp(y) - \exp(x) < \exp(y)(y - x)$ gilt.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 9

Untersuchen Sie, für welche $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^k \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

an der Stelle $x = 0$ stetig beziehungsweise differenzierbar ist.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 10

Zeigen Sie, dass die Formeln $(A \vee B) \to A$ und $B \to (A \wedge B)$ äquivalent sind, indem Sie

1. eine Wahrheitstafel für beide Formeln aufstellen.
2. durch Äquivalenzumformungen zeigen, dass die Formeln äquivalent sind. Geben Sie dabei die vorgenommenen Äquivalenzumformungen mit an.

[*4 + 6 = 10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Mathematische Grundlagen (01141) **WS 2012/13**

Klausur am 23.03.2013:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Formel für die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \ .$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} .$$

[*12 Punkte*]

Aufgabe 3

Seien V, W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ und f, g lineare Abbildungen von V nach W. Gilt dann stets

1. $\text{Bild}(f+g) \subset \text{Bild}(f) + \text{Bild}(g)$?
2. $\text{Bild}(f) \cup \text{Bild}(g) \subset \text{Bild}(f+g)$?

[*4 + 6 = 10 Punkte*]

Aufgabe 4

1. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n) = \left(\frac{2^n}{n!}\right)$ eine Nullfolge ist.

2. Ist die Folge

$$(b_n) = \left(\frac{n! + n}{2(n!) + 2^n} \right)$$

konvergent? Wenn ja, wogegen? (Aufgabenteil 1. darf verwendet werden.)

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

Aufgabe 5

Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$. Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen f monoton wachsend bzw. monoton fallend ist. Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Beweisen Sie: Wenn für eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a > 0 ,$$

dann hat die Potenzreihe den Konvergenzradius $\frac{1}{a}$. Hinweis: Quotientenkriterium für „gewöhnliche“ Reihen.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \sqrt{x} \ln(x) \, dx .$$

[*10 Punkte*]

Aufgabe 8

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = (A \vee B) \to (C \vee \neg B) .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

[*10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Mathematatische Grundlagen: Klausur vom 21.09.2013

Klausur am 21.09.2013:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

mindestens eine Lösung?

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R})$ und $\varphi : M_{22}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{22}(\mathbb{R})$ mit $\varphi(A) = AX - XA$ für alle $A \in M_{22}(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass φ eine lineare Abbildung ist.

(b) Berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ von $M_{22}(\mathbb{R})$.

[*4 + 8 = 12 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien U, V, W endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Seien $\varphi : U \longrightarrow V$ und $\psi : V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen, so dass φ injektiv ist, ψ surjektiv ist und $\text{Bild}(\varphi) = \text{Kern}(\psi)$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$$

gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{e^x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für die n-te Ableitung

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(x-n)}{e^x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 5

Berechnen Sie

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3(n+1)^2}{3n^5 - 2\pi}.$$

(b)
$$\int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1} dx.$$

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass genau ein $x \in [0, 1]$ existiert mit

$$1 - x^2 = e^{x-1}.$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} x^n$$

für $|x| < 1$ konvergiert und für $|x| > 1$ divergiert. Wie verhält sich die Reihe für $x = 1$ und $x = -1$?

[*10 Punkte*]

Aufgabe 8

Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln ist erfüllbar, tautologisch oder widerspruchsvoll?

(a) $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$.

(b) $((A \wedge B) \to C) \leftrightarrow (A \to (B \to C))$.

[*4 + 6 = 10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Klausur am 29.03.2014:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mit A^n bezeichnen wir das n-fache Produkt, also $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ Mal}}$.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

[*12 Punkte*]

Aufgabe 3

Die Abbildung $f : M_{22}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a-b & a+2b \end{pmatrix}$$

ist linear (was Sie nicht zu beweisen brauchen). Bestimmen Sie Kern(f) und Basen von Kern(f) und Bild(f).

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}\, , f(x) = \ln(x)e^{-x}$, genau ein lokales Maximum in $(0, \infty)$ hat.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 5

Untersuchen Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin(x)}{\ln(1 + x^2)}$$

existiert, und bestimmen Sie ihn gegebenenfalls.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n+2}}{n} x^n$$

konvergiert, d.h. bestimmen Sie ihren Konvergenzradius R und begründen Sie, ob für $x = -R$ und $x = R$ Konvergenz oder Divergenz vorliegt. Konvergiert die Reihe für $x = -\frac{1}{2}$ bzw. für $x = \frac{1}{3}$?

[*8 + 2 = 10 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\int_1^2 x^2 \ln(x)\, dx \ .$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 8

Die Formel α sei durch die folgende Wahrheitstafel definiert:

A	B	C	α
0	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**

Bestimmen Sie eine disjunktive und eine konjunktive Normalform von α; geben Sie vorgenommene Äquivalenzumformungen jeweils an. Zusatzfrage (die die Arbeit auch vereinfachen kann!): Finden Sie eine DNF mit nur zwei Monomen?

[*10 + 2 = 12 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Klausur 20 September Summer 2014, Fragen

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2014

Klausur am 20.09.2014:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Sei $a \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin(ax)$.

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $f^{(2n)}(x) = (-1)^n a^{2n} \sin(ax)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Dabei bezeichnet $f^{(2n)}(x)$ die $2n$te Ableitung von f an der Stelle x.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{34}(\mathbb{R})$. Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$.

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}^4$ mit $f(x) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 3

Untersuchen Sie für welche $t \in \mathbb{R}$ die folgende Menge U_t ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

$$U_t = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = t \right\}$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f \circ f = f$.

Beweisen Sie: Ist $f \neq \mathrm{id}_V$, so ist f nicht injektiv.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 5

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$. Seien $v_{12} = v_1 - v_2$, $v_{13} = v_1 - v_3$ und $v_{23} = v_2 - v_3$.

1. Bestimmen Sie eine Basis von $\langle v_{12}, v_{13}, v_{23} \rangle$.
2. Ergänzen Sie Ihre im ersten Teil der Aufgabe gefundene Basis von $\langle v_{12}, v_{13}, v_{23} \rangle$ zu einer Basis von V.

[*6 + 6 Punkte*]

Aufgabe 6

Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k+(-1)^k}{k^2}$ konvergent ist, dass dies aber, obwohl die Reihe alternierend ist, nicht mit dem Leibnitzkriterium gezeigt werden kann.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in allen Punkten in (a, b) differenzierbar. Es gelte

$$f(a) = g(a) \text{ und } f'(x) < g'(x) \text{ für alle } x \in (a, b).$$

Beweisen Sie, dass $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (a, b]$ gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 8

Verwenden Sie in dieser Aufgabe die folgenden Prädikatssymbole:

- $P(x)$ bedeutet: x ist ein Problem.
- $L(x, y)$ bedeutet: die Lösung von x ist y.
- $M(x)$ bedeutet: x ist ein Mensch.
- $V(x, y)$ bedeutet: x versteht y.

1. Drücken Sie die folgenden Aussagen in natürlicher Sprache in Prädikatenlogik aus:
   (a) Jedes Problem hat eine Lösung, die kein Mensch versteht.
   (b) Wenn jedes Problem eine Lösung hat, dann gibt es keinen Menschen, der jedes Problem versteht.

2. Übersetzen Sie die folgende Formel in natürliche Sprache.

$$\exists x(\forall y(P(y) \to L(y,x)))$$

[*(3 + 4) + 3 = 10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

FernUniversität in Hagen

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
WS 2014/15

DATUM: 28.03.2015
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Aufzeichnungen oder Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8		Summe
Bearbeitet										
max. Punktezahl	8	12	6	12	12	10	10	10		80
erreichte Punktezahl										
Korrektur										

Prüfergebnis/Note	

Mathematische Grundlagen (01141) — WS 2014/15

Klausur am 28.03.2015:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Eine Folge (a_n) sei definiert durch

$$a_1 = 10 \; , \quad a_{n+1} = 2 + \sqrt{2a_n - 1} \quad (n \in \mathbb{N}) \; .$$

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $a_n \geq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (woraus insbesondere erst folgt, dass die Folgenglieder für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert sind!).

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \; .$$

[*12 Punkte*]

Aufgabe 3

Ergänzen Sie

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; , \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$; zeigen Sie, dass Sie tatsächlich eine Basis gefunden haben.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 4

Geben Sie jeweils für

$$a) \;\; V = \mathbb{R}^2 \quad , \qquad b) \;\; V = \mathbb{R}^3$$

entweder eine lineare Abbildung $f : V \to V$ mit Kern(f)=Bild(f) an oder begründen Sie, warum es eine solche Abbildung nicht geben kann.

[*6 + 6 Punkte*]

Aufgabe 5

Es sei (a_n) die in Aufgabe 1 definierte Folge.
a) Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.
b) Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{a_n}\right)^n \text{ ?}$$

Hinweise: Monotonieprinzip; das Ergebnis von Aufgabe 1 kann ohne Beweis benutzt werden.

[*7 + 5 Punkte*]

Aufgabe 6

Bestimmen Sie alle lokalen Extremwerte der Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}\,, f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ und deren Art.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx \ .$$

[*10 Punkte*]

Aufgabe 8

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = ((B \vee \neg C) \wedge \neg D) \to \neg A \ .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

[*10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Klausur 26 September Ss 2015, Fragen

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

FernUniversität in Hagen

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
SoSe 15

DATUM: 26.09.2015
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise
(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Aufzeichnungen oder Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Bearbeitet								
max. Punktezahl	10	18	10	8	12	12	10	80
erreichte Punktezahl								
Korrektur								

Prüfergebnis/Note	

Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2015

Klausur am 26.09.2015:

Aufgabenstellungen

Aufgabe 1

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a \leq 1$.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $(1+a)^n \leq 1 + (2^n - 1)a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{55}(\mathbb{R})$. Sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ definiert durch $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^5$.

Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und von $\mathrm{Bild}(f)$.

[*18 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und seien U und W Unterräume von V. Seien $u \in U$, $u \neq 0$ und $w \in W$, $w \neq 0$.

Beweisen Sie: Wenn $U \cap W = \{0\}$ ist, dann sind u und w linear unabhängig.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die lokalen Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x + 2\cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Folgende Tabelle könnte für die Bearbeitung der Aufgabe nützlich sein und darf ohne Begründung verwendet werden:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

[*8 Punkte*]

Aufgabe 5

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit den beiden folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $x \in (a, b)$ gibt es ein $y \in (x, b]$ mit $f(y) > f(x)$.

(ii) Für a gibt es kein $y \in (a, b]$ mit $f(y) > f(a)$.

Beweisen Sie: Dann gilt

1. f nimmt das Maximum in a an, d.h. für jedes $x \in [a, b]$ gilt $f(x) \leq f(a)$.
2. f nimmt das Maximum in keinem Punkt $c \in (a, b)$ an.
3. f nimmt das Maximum auch in b an.

[*3 + 3 + 6 = 12 Punkte*]

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{(-1)^n}{n})^{n^2}$

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

Aufgabe 7

Bestimmen Sie zu jeder Stelle, an der ein Variablensymbol in den folgenden Formeln steht, ob es dort frei oder gebunden ist. Variablensymbole werden mit x, y bezeichnet.

1. $\forall x P(x) \to P(y)$
2. $\forall x P(x) \to Q(x, y)$
3. $\forall x (P(x) \to Q(x, y))$
4. $Q(x, y) \to \exists y P(x)$

[*2 + 3 + 3 + 2 = 10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

FernUniversität in Hagen

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
WS 2015/16

DATUM: 27.02.2016
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Aufzeichnungen oder Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8		Summe
Bearbeitet										
max. Punktezahl	8	14	10	10	8	8	10	12		80
erreichte Punktezahl										
Korrektur										

Prüfergebnis/Note	

Mathematische Grundlagen (01141) — WS 2015/16

Klausur am 27.02.2016:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mit A^n bezeichnen wir das n-fache Produkt, also $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ Mal}}$.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Berechnen Sie in Abhängigkeit von der Konstanten $m \in \mathbb{R}$ die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

[*14 Punkte*]

Aufgabe 3

Die Abbildung $f : M_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$$

ist linear (was Sie nicht zu beweisen brauchen). Bestimmen Sie Kern(f) und Basen von Kern(f) und Bild(f).

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4

Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie sie ggf.:

$$a) \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n) \cdot \cos(n)}{n} \quad , \qquad b) \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{x} .$$

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \cos(x)$, im Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$ genau ein lokales Maximum hat.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 6

Begründen Sie, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^n}{(2n)!}$$

konvergiert oder divergiert.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$a) \int_0^{\pi} x \cos(x)\, dx \quad , \qquad b) \int_2^3 \frac{x+1}{x-1}\, dx \ .$$

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

Aufgabe 8

a) Gegeben sei die Formel

$$\alpha = (A \to B) \vee (C \to (B \wedge D)) \ .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

b) Zeigen Sie per Wahrheitstafel, dass für zwei Formeln β, γ stets $\beta \wedge (\beta \vee \gamma) \approx \beta$ gilt.

c) Finden Sie damit eine Normalform von α aus a), die gleichzeitig DNF und KNF ist?

[*6 + 3 + 3 = 12 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2016

Klausur am 24.09.2016:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen begründet werden.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$2n + 1 \leq n^2 \leq 2^n$$

für alle $n \geq 4$ gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{Q})$?

(a) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a^2 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \right\}$

(b) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \right\}$

(c) $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \right\}$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{34}(\mathbb{R}).$$

(a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ und bestimmen Sie eine Basis der Lösungsmenge.

(b) Ergänzen Sie Ihre in (a) gefundene Basis zu einer Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^4$.

(c) Sei $\mathcal{B}$ die Basis aus (b) und $\mathcal{C}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie für $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = Ax$ die Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

(Hinweis: Sollten Sie keine Lösung für (a) gefunden haben, ergänzen Sie in (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$. Sollten Sie in (b) keine Basis bestimmt haben, lösen Sie (c) mit einer beliebigen Basis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^4$, bei der jeder Basisvektor mindestens zwei Einträge ungleich Null besitzt.)

[*8 + 4 + 4 = 16 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \to V$ linear. Beweisen Sie, dass genau dann $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$ gilt, wenn $\mathrm{Kern}(f \circ f) = \mathrm{Kern}(f)$ ist.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 5

Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $0 < b_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \prod_{i=1}^{n} b_i \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

konvergiert.

(Hinweis: Monotonieprinzip)

[*8 Punkte*]

Aufgabe 6

Sei $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ für alle $x \in D$.

(a) Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung von f im Intervall $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

(c) Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom von f in $x_0 = 1$.

[*4 + 5 + 3 = 12 Punkte*]

Aufgabe 7

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^7$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{3+n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{3n^n}$

[*10 Punkte*]

Aufgabe 8

Bestimmen Sie eine Negationsnormalform der beiden folgenden Formeln:

(a) $\neg((A \vee B) \wedge (\neg B \vee C))$

(b) $\neg(\forall x \exists y(R(x,y) \wedge (\neg Q(y))))$

[*4 + 4 = 8 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

FernUniversität in Hagen

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
WS 2016/17

DATUM: 04.03.2017
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise
(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Aufzeichnungen oder Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8		Summe
Bearbeitet										
max. Punktezahl	8	12	12	10	10	10	10	8		80
erreichte Punktezahl										
Korrektur										

Prüfergebnis/Note	

Mathematische Grundlagen (01141) WS 2016/17

Klausur am 04.03.2017:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \; .$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 11 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 25 \\ 14 \end{pmatrix} \; .$$

[*12 Punkte*]

Aufgabe 3

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to M_{22}(\mathbb{R})$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b+c & a-b \\ 2a+c & 2b+c \end{pmatrix}$$

ist linear (was Sie nicht zu beweisen brauchen). Bestimmen Sie Kern(f) und Basen von Kern(f) und Bild(f).

[*12 Punkte*]

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die lokalen Minima bzw. Maxima der Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, $I = [0, \infty)$, $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 5

Die Funktionen f und g seien auf dem Intervall I streng monoton und differenzierbar; es seien $a, b \in I$ mit $a < b$ und $f(a) = g(b) = 0$. Beweisen Sie, dass es ein $x_0 \in (a, b)$ gibt mit

$$\frac{g'(x_0)}{g(x_0)} = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \ .$$

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die Reihen

$$a) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} \ , \qquad b) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1} \ , \qquad c) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n+1}$$

auf Konvergenz.

[*3 + 3 + 4 = 10 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1} \, dx \ .$$

[*10 Punkte*]

Aufgabe 8

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = (D \vee (B \wedge \neg C)) \to A \ .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

[*8 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

FernUniversität in Hagen

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

Lehrgebiet Algebra
Prof. Dr. Luise Unger

FernUniversität in Hagen • 58084 Hagen

Klausurinformationen
für unsere
Studentinnen und Studenten

Ihr Zeichen:
Ihre Nachricht vom:

Mein Zeichen:
Meine Nachricht vom:

Auskunft erteilt:
Telefon: +49 2331 987-2287
Telefax:
E-Mail: 1141@fernuni-hagen.de
Hausanschrift: Universitätsstr. 1
D – 58097 Hagen

Datum: 15.9.2017

Klausur zum Kurs 01141 „Mathematische Grundlagen" im SoSe 2017

Liebe Fernstudentin, lieber Fernstudent,

beiliegend finden Sie Ihre Klausur, eine Teilnahmebestätigung und gegebenenfalls einen Leistungsnachweis zum Kurs

01141 „Mathematische Grundlagen".

Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie die Note 4,0 oder besser erreicht haben.

Herzlichen Glückwunsch allen, die bestanden haben!

Zu Ihrer Information hier die Klausurstatistik: 237 Klausuren sind bisher eingegangen.

$\geq$ 58 Punkte	49 bis 57 Punkte	40 bis 48 Punkte	32 bis 39 Punkte	0 bis 31 Punkte
Note: sehr gut	Note: gut	Note: befriedigend	Note: ausreichend	Note: mangelhaft
27 Studierende	21 Studierende	42 Studierende	51 Studierende	96 Studierende.

Die Klausur und eine Musterlösung finden Sie im virtuellen Studienplatz des Sommersemesters 2016 unter „Alte Klausuren".

Mit freundlichen Grüßen, Ihr Betreuungsteam

Anlage(n): Klausur
Teilnahmebestätigung
ggf. Leistungsnachweis

Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2017

Klausur am 09.09.2017:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen begründet werden.

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 e^{-x}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \left(n(n-1) - 2nx + x^2\right) e^{-x}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dabei ist mit $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung von f gemeint. Sie müssen nicht zeigen, dass diese existiert.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2 ✓

Sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \in M_{33}(\mathbb{R}).$$

(a) Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von a) die Treppennormalform von A.

(b) Bestimmen Sie ein $a \in \mathbb{R}$, so dass die Abbildung $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $x \mapsto Ax$ nicht bijektiv ist.

[*8 + 4 = 12 Punkte*]

Aufgabe 3 ✓

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung. Sei

$$U_f = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass U_f ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $U_f \cap \mathrm{Kern}(f) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ gilt.

[*6 + 4 = 10 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Seien $v, w \in V$ mit $v, w \neq 0$. Weiter gebe es $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\lambda \neq \mu$ so dass $f(v) = \lambda v$ und $f(w) = \mu w$ gilt. Zeigen Sie, dass v und w linear unabhängig sind.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 5

Welche der folgenden Mengen sind nach unten bzw. oben beschränkt, welche besitzen ein Minimum oder ein Maximum?

(a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade}\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 1 > 0\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| - 1 < 0\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 \leq 1\}$

[*2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte*]

Aufgabe 6

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_m < a_n$ für alle $n \geq n_0$ gibt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Welche der beiden folgenden Reihen konvergieren?

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-7)^n}{5^{n+1}}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

Aufgabe 8

(a) Stellen Sie eine Wahrheitstafel für die Formel

$$((P \to Q) \wedge (R \vee Q)) \to (P \wedge Q)$$

auf. Ist die Formel erfüllbar?

(b) Sind die Formeln

$$(P \wedge ((Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R))) \vee (R \wedge Q) \text{ und } (P \vee R) \wedge Q$$

logisch äquivalent?

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Klausur 10 März Wintersemester 2017/2018, Fragen

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

FernUniversität in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
WS 2017/18

DATUM: 10.03.2018
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Aufzeichnungen oder Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8		Summe
Bearbeitet										
max. Punktezahl	6	12	14	14	8	10	8	8		80
erreichte Punktezahl										
Korrektur										

Prüfergebnis/Note	

Klausur am 10.03.2018:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Ungleichung für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq n^3 \ .$$

[*6 Punkte*]

Aufgabe 2

Berechnen Sie in Abhängigkeit von $\beta \in \mathbb{R}$ die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und ggf. die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

[*12 Punkte*]

Aufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils: Es gibt eine lineare Abbildung $f_i : V_i \to V_i$ mit Bild(f_i)=Kern(f_i)

i) für $V_1 = \mathbb{R}^2$,

ii) für $V_2 = M_{33}(\mathbb{R})$,

iii) für $V_3 = \mathbb{K}[T]$.

(Bei Angabe eines korrekten Beispiels für einen Beweis müssen Sie die Linearität nicht nachrechnen, aber Bild und Kern - ebenfalls ohne Beweis - korrekt angeben.)

[*4 + 4 + 6 = 14 Punkte*]

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für} \quad x \neq 0 \end{cases} .$$

i) Zeigen Sie: f ist stetig auf $\mathbb{R}$.

ii) Zeigen Sie: f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

iii) Ist f' stetig in $x_0 = 0$?

[*4 + 4 + 6 = 14 Punkte*]

Aufgabe 5

Beweisen Sie die Bernoullische Ungleichung

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für} \quad x \geq -1\,,\ n \in \mathbb{N}$$

nicht mit vollständiger Induktion, sondern mit den Mitteln der Differentialrechnung (angewendet auf die Differenz der beiden Seiten).

[*8 Punkte*]

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die Reihen

$$i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}\,, \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$$

auf Konvergenz.

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx\,.$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 8

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = A \wedge \neg B \to C \wedge D\,.$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

[*8 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Klausur 8 September Sommersemester 2018, Fragen

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

FernUniversität in Hagen

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
Sommersemester 2018

DATUM: 08.09.2018
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Als Hilfsmittel erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Hilfsmittel dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit der Note 5,0 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Bearbeitet									
max. Punktezahl	8	16	10	10	8	8	10	10	80
erreichte Punktezahl									
Korrektur									

Prüfergebnis/Note	

Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2018

Klausur am 08.09.2018:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen begründet werden.

Aufgabe 1

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix A, so dass $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$ gilt.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.

(d) Zeigen Sie, dass f surjektiv, aber nicht injektiv ist.

(e) Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ für $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ und $\mathcal{C} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

[*4 + 2 + 4 + 2 + 4 = 16 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $S = \{x_1, x_2, x_3\} \subseteq V$.

(a) Zeigen Sie: $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \langle x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1 \rangle$.

(b) Gilt immer $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \langle x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1 \rangle$?

[*6 + 4 = 10 Punkte*]

Aufgabe 4

Geben Sie jeweils ein Beispiel (mit kurzer Begründung) für

(a) ein lineares Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen.

(b) eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die einen Häufungspunkt besitzt, der nicht in der Menge enthalten ist.

(c) reelle Zahlen a und b, so dass $\int_a^b e^{-x}dx = 1$ gilt.

[*3 + 3 + 4 = 10 Punkte*]

Aufgabe 5

Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f_a : [0, \pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{\cos(x)}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

stetig?

[*8 Punkte*]

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sin(x) - e^{-x}$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ genau eine Nullstelle besitzt.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right) x^n?$$

[*10 Punkte*]

Aufgabe 8

Gegeben sei die aussagenlogische Formel

$$\alpha = (A \to (B \wedge \neg C)) \to (\neg B \to (\neg A \vee C)).$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel (mit Zwischenschritten), dass α eine Tautologie ist.

(b) Formen Sie α mit Hilfe von Äquivalenzregeln in eine Negationsnormalform um.

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Klausur 9 März 2019, Fragen

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

FernUniversität in Hagen

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
WS 2018/19

DATUM: 09.03.2019
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Aufzeichnungen oder Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit der Note 5,0 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8		Summe
Bearbeitet										
max. Punktezahl	8	14	10	14	10	8	8	8		80
erreichte Punktezahl										
Korrektur										

Prüfergebnis/Note	

Mathematische Grundlagen (01141) **WS 2018/19**

Klausur am 09.03.2019:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2 \ .$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Berechnen Sie in Abhängigkeit von $m \in \mathbb{R}$ die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und ggf. die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

[*14 Punkte*]

Aufgabe 3

Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5 \ , \ f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \\ x_4 - x_3 \\ x_3 - x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear (was Sie nicht zu zeigen brauchen). Bestimmen Sie Basen von Kern(f) und Bild(f) und überprüfen Sie die Aussage des Rangsatzes.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4

Geben Sie jeweils ein Beispiel (mit kurzer Begründung) für

a) eine lineare Abbildung f mit dim(Kern(f))=1;

b) eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die Infimum und Maximum, aber kein Minimum besitzt;

c) eine divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

d) eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in $x_0 = 1$ stetig, aber nicht diffferenzierbar ist.

[*4 + 3 + 3 + 4 = 14 Punkte*]

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass es genau ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $e^{-x} = \frac{x^2}{x^2+1}$. Geben Sie ein Intervall mit Länge ≤ 1 an, in dem dieses x liegt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^n}{(2n)!}$$

auf Konvergenz.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\, dx \ .$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 8

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = (A \to B) \vee (C \to (A \wedge B)) \ .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

[*8 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Klausur 30 September 2019, Fragen

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

FernUniversität in Hagen

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
Sommersemester 2019

DATUM: 07.09.2019
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Als Hilfsmittel erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Hilfsmittel dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit der Note 5,0 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Bearbeitet									
max. Punktezahl	10	10	12	8	10	10	10	10	80
erreichte Punktezahl									
Korrektur									

Prüfergebnis/Note	

Mathematische Grundlagen (01141) **SoSe 2019**

Klausur am 07.09.2019:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{e^x}$. Diese Funktion ist unendlich oft differenzierbar, was Sie nicht zeigen müssen. Zeigen Sie mit Induktion nach n, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ für die n-te Ableitung der Funktion $f^{(n)}$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(x-n)}{e^x}.$$

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & = & 5 \\ & & & & x_3 & & & + & x_5 & = & 0. \end{array}$$

Berechnen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 3

1. Genau eine der beiden folgenden Abbildungen ist linear. Begründen Sie für beide Abbildungen, warum sie linear bzw. nicht linear sind.

   (a) $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad + bc$,

   (b) $g : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $g(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a - 2(b + c) - d$.

2. Genau eine der beiden folgenden Mengen ist eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{R}^4$. Begründen Sie für beide Mengen, warum sie linear unabhängig bzw. linear abhängig sind.

(a) $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$,

(b) $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$.

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ mit $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$. Diese Abbildung ist linear, was Sie nicht beweisen müssen. Bestimmen Sie $\mathrm{Rg}(f)$.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 5

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^3|\sin(\frac{1}{x})| & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Ist f stetig?

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $a < x < b$. Zeigen sie, dass f injektiv ist.

(Hinweis: Mittelwertsatz)

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Gegeben sei die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{n+1}{n^2}$. Zeigen Sie, dass diese Reihe konvergiert, aber

nicht absolut konvergiert.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 8

Gegeben sei die Formel $\alpha = ((A \to B) \wedge (B \leftrightarrow C)) \to (A \wedge B)$.

(a) Stellen Sie die Wahrheitstafel (mit Zwischenschritten) für α auf. Ist die Formel erfüllbar, tautologisch, widerspruchsvoll?

(b) Finden Sie eine konjunktive oder disjunktive Normalform für α.

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$